

हमारा विश्वास... हर एक विद्यार्थी है स्वास

JEE
MAIN
JAN'19

QUESTION WITH SOLUTION
DATE : 10-01-2019 _ MORNING



20000+
SELECTIONS SINCE 2007

JEE (Advanced)

4626

(Under 50000 Rank)

JEE (Main)

13953

NEET / AIIMS NTSE / OLYMPIADS

662

(since 2016)

1066

(5th to 10th class)

Toll Free :
1800-212-1799

MOTION™

Nurturing potential through education

H.O. : 394, Rajeev Gandhi Nagar, Kota
www.motion.ac.in |✉: info@motion.ac.in

[MATHEMATICS] 10-01-2019_Morning

1. पाँच प्रेक्षणों का माध्य 5 है तथा उनका प्रसरण 9.20 है। यदि इन दिए गए पाँच प्रेक्षणों में से तीन 1, 3 तथा 8 हैं, तो अन्य दो प्रेक्षणों का एक अनुपात है:

(A) 6 : 7 (B) 4 : 9 (C) 10 : 3 (D) 5 : 8

Sol. B

1, 3, x_1 , x_2 , 8 \rightarrow 5 observer

$$\text{Mean} = \frac{\sum x_i}{5} = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 = 13$$

$$\text{var.} = \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{5} - 25 = 9.20$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 171 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 171 - 1 - 9 - 64 = 97$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 97$$

$$x_1x_2 = 36$$

$$x_1 : x_2 = 4 : 9 \text{ as sum} = 13 \text{ \& pr} = 36$$

2. ऐसी सभी दों अंकों की धन संख्याओं, जिन्हें 7 से विभाजित करने पर 2 या 5 शेषफल प्राप्त होता है, का योग है:

(A) 1465 (B) 1256 (C) 1356 (D) 1365

Sol. C

$$\sum_{r=2}^{13} (7r+2) \text{ \& } \sum_{r=1}^{13} (7r+5) = 702$$

$$= 654$$

$$\text{Total} = 654 + 702 = 1356$$

3. यदि परवल्यों $y^2 = 4b(x - c)$ तथा $y^2 = 8ax$ का एक उभयनिष्ठ अभिलंब है, तो क्रमित त्रिक (a,b,c) के लिए निम्न में से कौन सा एक सही विकल्प है?

(A) (1,1,3) (B) $(\frac{1}{2}, 2, 3)$ (C) $(\frac{1}{2}, 2, 0)$ (D) (1,1,0)

Sol. D

Parabola $y^2 = 4b(x - c)$ & $y^2 = 8ax$ have common normal other than x axis normals are :

$$y = m(x - c) - 2bm - bm^3$$

$$y = mx - 4am - 2am^3$$

$$(C+2b)m + bm^3 = 4am + 2am^3$$

$$(4a - C - 2b)m = (b - 2a)m^3$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{C}{2a - b} - 2 > 0$$

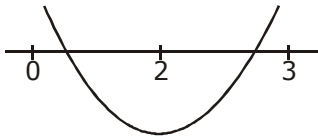
$$\Rightarrow \frac{C}{2a - b} > 2$$

only (4) option is true

4. द्विघातीय समीकरण $(c - 5)x^2 - 2cx + (c - 4) = 0$, $c \neq 5$ पर विचार कीजिए। माना S, c के उन सभी पूर्णाकीय मानों, जिनके लिए समीकरण का एक मूल अंतराल (0,2) में है तथा इसका दूसरा मूल अंतराल (2, 3) में है, का समुच्चय है, तो S के अवयवों की संख्या है:

(A) 18 (B) 11 (C) 10 (D) 12

Sol. B



$$f(0)(2) < 0$$

$$\& f(2) f(3) < 0$$

$$\Rightarrow (c-4)(c-24) < 0 \& (c-24)(4c-49) < 0$$

$$\frac{49}{4} < C < 24$$

$$S = \{13, 14, 15, 16, \dots, 23\} \Rightarrow \text{No.} = 11$$

5. यदि $(1 + x^{\log_2 x})^5$ के द्विपद प्रसार में तीसरा पद 2560 के बराबर हैं, तो x का एक सम्भव मान है:

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $4\sqrt{2}$

Sol. C

$$T_3 {}^5C_2 (x^{\log_2 x})^2 = 2560$$

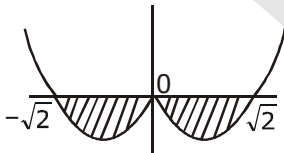
$$2(\log_2 x)^2 = \log_2 256 = 8$$

$$\log_2 x = 2 \text{ or } -2 \Rightarrow 4 \text{ or } \frac{1}{4}$$

6. माना $I = \int_a^b (x^4 - 2x^2) dx$ है। यदि I न्यूनतम हैं, तो क्रमित युग्म (a, b) है:

(A) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (B) $(-\sqrt{2}, 0)$ (C) $(0, \sqrt{2})$ (D) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Sol. D



as Area given is Negative so it will be Minimum when we take longest Integrative possible and in given option longest interval is (4)

7. माना $\vec{a} = 2\hat{i} + \lambda_1\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} + (3 - \lambda_2)\hat{j} + 6\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 3\hat{i} + 6\hat{j} + (\lambda_3 - 1)\hat{k}$ तीन ऐसे सदिश है कि $\vec{b} = 2\vec{a}$ है तथा सदिश \vec{a} , सदिश \vec{c} के लंबवत हैं, तो $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ का एक संभावित मान है:

(A) $(1, 3, 1)$ (B) $(\frac{1}{2}, 4, -2)$ (C) $(1, 5, 1)$ (D) $(-\frac{1}{2}, 4, 0)$

Sol. B

$$(1) 4\hat{i} + (3 - \lambda_2)\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} + 2\lambda_1\hat{j} + 6\hat{k}$$

$$= 3 - \lambda_2 = 2\lambda_1 \Rightarrow 2\lambda_1 + \lambda_2 = 3$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 6 + 6\lambda_1 + 3(\lambda_3 - 1) = 0$$

$$2\lambda_1 + \lambda_3 = -1$$

$$(\lambda_1, 3 - 2\lambda_1, -1 - 2\lambda_1) \text{ is } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

by options (B) is correct

8. यदि समीकरण निकाय
 $x + y + z = 5$

$$x + 2y + 3z = 9$$

$$x + 3y + \alpha z = \beta$$

के असंख्य हल हैं, तौ $\beta - \alpha$ बराबर हैं:

- (A) 5 (B) 21 (C) 18 (D) 8

Sol. D

$$(1) D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha - 1) - 4 = (\alpha - 5)$$

for ∞ solutions $D = 0 \Rightarrow \alpha = 5$

(2) Now

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 3 \\ \beta & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 + \beta - 15 = 0$$

$$\beta = 13$$

$$(3) \text{ put } \beta = 13 \text{ in } D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 13 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ \& } D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \beta - \alpha = 13 - 5 = 8$$

9. 140 विद्यार्थियों, जिनके क्रमांक 1 से 140 हैं, की एक कक्षा में सभी सम क्रमांक के विद्यार्थियों ने गणित विषय चुना है, उन्होंने जिनके क्रमांक 3 से विभाजित होते हैं भौतिक शास्त्र विषय चुना है तथा उन्होंने जिनके क्रमांक 5 से विभाजित होते हैं, रसायन शास्त्र विषय चुना है। तो उन विद्यार्थियों की संख्या, जिन्होंने इन तीन में से कोई भी विषय नहीं चुना है, हैं:

- (A) 42 (B) 102 (C) 38 (D) 1

Sol. C

$$n(A) = \text{No. of student taken maths} = 70$$

$$n(B) = \text{Physics} = 46$$

$$n(C) = \text{chemistry} = 28$$

$$n(A \cap B) = 23,$$

$$n(B \cap C) = 9, n(A \cap C) = 14$$

$$n(A \cap B \cap C) = 4,$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) + n(A \cap B \cap C)$$

$$= 70 + 46 + 28 - 23 - 9 - 14 + 4 = 102$$

$$\Rightarrow \text{Total } n(A \cup B \cup C) = 140 - 102 = 38 = \text{Not opted any course}$$

10. एक त्रिभुजाकार प्लॉट ABC पर विचार कीजिए, जिसकी भुजाएँ $AB = 7 \text{ m}$, $BC = 5 \text{ m}$ तथा $CA = 6 \text{ m}$ हैं। AC के मध्य बिंदु D पर स्थित एक सीधा लैम्प-पोस्ट, B पर 30° का कोण अंतरित करता है। लैम्प-पोस्ट की (मीटरों में) ऊँचाई है:

- (A) $2\sqrt{21}$ (B) $\frac{2}{3}\sqrt{21}$ (C) $7\sqrt{3}$ (D) $\frac{3}{2}\sqrt{21}$

Sol. B

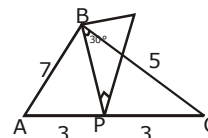
$$BD = h \cot 30^\circ = h\sqrt{3}$$

$$\text{So, } 7^2 + 5^2 = 2 \left((h\sqrt{3})^2 + 3^2 \right)$$

$$\Rightarrow 37 = 3h^2 + 9.$$

$$\Rightarrow 3h^2 = 28$$

$$h = \sqrt{\frac{28}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{21}$$



11. $\sin^2 2\theta + \cos^4 2\theta = \frac{3}{4}$ को संतुष्ट करने वाले $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के सभी मानों का योग है:

- (A) $\frac{3\pi}{8}$ (B) π (C) $\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{5\pi}{4}$

Sol. C

$$1 - \cos^2(2\theta) + \cos^4(2\theta) = \frac{3}{4}$$

$$4\cos^4(2\theta) - 4\cos^2(2\theta) + 1 = 0$$

$$(2\cos^2(2\theta) - 1)^2 = 0$$

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1}{2} = \cos^2 \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$$

$$n = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{-\pi}{8} \text{ (Reject)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \text{ (Reject)}$$

$$\text{sum} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$$

12. निम्न कथन पर विचार कीजिए "P(n) : $n^2 - n + 41$ एक अभाज्य संख्या है," तो इनमें से कौन सा एक सत्य है?

- (A) P(3) तथा P(5) दोनों सत्य हैं। (B) P(3) असत्य हैं परन्तु P(5) सत्य है
(C) P(3) तथा P(5) दोनों असत्य हैं। (D) P(5) असत्य है परन्तु P(3) सत्य है।

Sol. A

$$p(n) = n^2 - n + 41$$

$$n(5) = 61$$

$$n(3) = 47$$

13. यदि वक्रों $y = kx^2$ तथा $x = ky^2$, ($k > 0$) के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 1 वर्ग इकाई है, तो k बराबर है:

- (A) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\sqrt{3}$

Sol. A

$$\frac{1}{k} \times \frac{1}{k} = 1$$

$$\frac{1}{k^2} = 3 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

14. प्रत्येक $t \in \mathbb{R}$ के लिए, माना $[t]$, t के समान या उससे कम महत्तम पूर्णांक है, तो $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - |x| + \sin|1 - x|) \sin\left(\frac{\pi}{2}|1 - x|\right)}{|1 - x|[1 - x]}$.

- (A) का अस्तित्व नहीं है (B) 1 के बराबर है। (C) -1 के बराबर है। (D) 0 के बराबर है।

Sol. D

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - |x| + \sin|1 - x|) \sin\left(\frac{\pi}{2}|1 - x|\right)}{|1 - x|[1 - x]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - x) + \sin(x - 1)}{(x - 1)(-1)} \sin\left(\frac{\pi}{2}(-1)\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(1 - \frac{\sin(x - 1)}{(x - 1)}\right)(-1) = (1 - 1)(-1) = 0 \end{aligned}$$

15. बिंदु $(4, -1, 2)$ से होकर जाने वाला समतल जो रेखाओं $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ तथा $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$ के समांतर है, निम्न में से जिस बिंदु से भी होकर जाता है, वह है:
 (A) $(1, 1, -1)$ (B) $(-1, -1, 1)$ (C) $(-1, -1, -1)$ (D) $(1, 1, 1)$

Sol. D

let \vec{n} be the normal vector to the plane passing through $(4, -1, 2)$ and parallel to the lines L_1 & L_2

$$\text{then } \vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

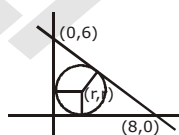
$$\begin{aligned} \therefore \vec{n} &= -7\hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k} \\ \therefore \text{Equation of plane is} & -7(x - 4) - 7(y + 1) + 7(z - 2) = 0 \\ \therefore x + y - z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Now check options

16. यदि रेखा $3x + 4y - 24 = 0$ x - अक्ष को बिंदु A तथा y - अक्ष को बिंदु B पर काटती है, तो त्रिभुज OAB, जहाँ O मूलबिंदु है, का अन्तः केंद्र है:
 (A) $(2, 2)$ (B) $(4, 3)$ (C) $(3, 4)$ (D) $(4, 4)$

Sol. A

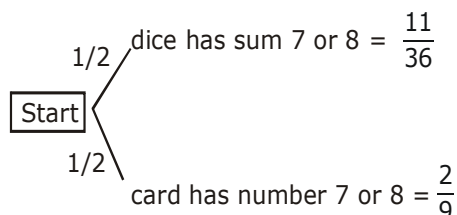
$$\begin{aligned} \frac{|3r + 4r - 24|}{5} &= r \Rightarrow |7r - 24| = 5r \\ 7r - 24 &= \pm 5r \\ \Rightarrow r &= 2 \text{ \& } 14 \Rightarrow (2, 2) \end{aligned}$$



17. एक अनभिनत (unbiased) सिक्के को उछाला जाता है। चित्त आने पर अनभिनत पासों के एक युग्म को उछाला जाता है तथा उन पर आई संख्याओं का योग नोट किया जाता है। यदि सिक्के पर पट आता है, तो 9 कार्डों जिन पर संख्याएं $1, 2, 3, \dots, 9$ अंकित हैं, की एक अच्छी प्रकार से फेंटी गई गड्डी में से एक कार्ड निकाल कर उस पर आई संख्या नोट की जाती है। इस प्रकार नोट की गई संख्या के 7 अथवा 8 होने की प्रायिकता है:

- (A) $\frac{15}{72}$ (B) $\frac{13}{36}$ (C) $\frac{19}{36}$ (D) $\frac{19}{72}$

Sol. D



$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{11}{36} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{19}{72}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 Head dice tail card has
 comes has 7 or 8 comes 7 or 8

18. माना $f(x) = \begin{cases} \max\{|x|, x^2\}, & |x| \leq 2 \\ 8 - 2|x|, & 2 < |x| \leq 4 \end{cases}$. माना S, अन्तराल $(-4, 4)$ के उन बिन्दुओं, जिन पर f अवकलनीय नहीं हैं, का

समुच्चय है, तो S:

(A) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ के बराबर है।

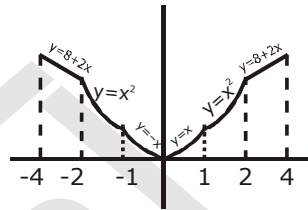
(B) एक रिक्त समुच्चय है।

(C) $\{-2, 2\}$ के बराबर है।

(D) $\{-2, -1, 1, 2\}$ के बराबर है।

Sol. A

$$\begin{cases} 8 + 2x, & -4 \leq x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq -1 \\ |x|, & -1 < x < 1 \\ 8 - 2x, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$



$f(x)$ is not differentiable at $x = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
 $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

19. माना फलन $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ इस प्रकार है कि $f(x) = x^3 + x^2f'(1) + xf''(2) + f'''(3)$, $x \in \mathbb{R}$ तो $f(2)$ बराबर है:

(A) 30

(B) 8

(C) -2

(D) -4

Sol. C

$$f(x) = x^3 + x^2f'(1) + xf''(2) + f'''(3), x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2xf'(1) + f''(2)$$

$$f''(x) = 6x + 2f'(1) \text{ \& } f'''(x) = 6$$

Put $x = 1$ in $f'(x)$ & $x = 2$ in $f''(x)$ & find $f'(1)$, $f''(2)$

$$\Rightarrow f'(1) = 3 + 2f'(1) + f''(2)$$

$$\begin{cases} f'(1) = 5 \\ f''(2) = 2 \\ f'''(3) = 6 \end{cases}$$

$$f''(2) = 12 + 2f'(1)$$

$$f'(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 6$$

$$\Rightarrow f(2) = -2$$

20. यदि एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 5, $5r$, $5r^2$ हैं, तो r निम्न में से किसके बराबर नहीं हो सकता?

(A) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{7}{4}$

(C) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{3}{2}$

Sol. B

$$(1) 0 < r < 1$$

$$r + r^2 > 1$$

$$\left(r - \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right) \left(r - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right) > 0$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < r < 1 \quad \dots(1)$$

$$(2) r > 1$$

$$r^2 - r - 1 < 0$$

$$\left(r - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(r - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) < 0$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(1 < r < \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \dots(B)$$

By (A) & (B)

$$r \in \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

21. अतिपरवलय $4x^2 - 5y^2 = 20$ की एक स्पर्शरेखा जो रेखा $x - y = 2$ के समांतर हैं, का समीकरण हैं:
 (A) $x - y + 9 = 0$ (B) $x - y - 3 = 0$ (C) $x - y + 7 = 0$ (D) $x - y + 1 = 0$

Sol. D

$$H : \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$$

equation of tangent $\Rightarrow y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ & $m = 1$

$$y = x \pm \sqrt{5-4} \Rightarrow y = x \pm 1$$

$$x - y \pm 1 = 0$$

22. माना z_1 तथा z_2 कोई दो शून्येतर सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार हैं कि $3|z_1| = 4|z_2|$. यदि $z = \frac{3z_1}{2z_2} + \frac{2z_2}{3z_1}$ तो :

(A) $\text{Im}(z) = 0$ (B) $|z| = \sqrt{\frac{5}{2}}$ (C) $\text{Re}(z) = 0$ (D) $|z| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}$

Sol. Bonus(All options are wrong)

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{4}{3} \Rightarrow \left|\frac{3z_1}{2z_2}\right| = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$$

using polar form :

$$\frac{3z_1}{2z_2} = 2\text{cis}\theta = 2\cos\theta + 3i\sin\theta$$

$$\frac{2z_2}{3z_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \right) = \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$z = \frac{5}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}i\sin\theta$$

all options are wrong

23. एक बिंदु P, रेखा $2x - 3y + 4 = 0$ पर गति करता है। यदि Q (1,4) तथा R(3, - 2) निश्चित बिंदु हैं, तो ΔPQR के केंद्रक का बिंदुपथ (locus) एक रेखा है:

(A) जो कि x - अक्ष के समांतर हैं। (B) जिसकी ढाल (slope) $\frac{3}{2}$ है।

(C) जो कि y - अक्ष के समांतर है।(D) जिसकी ढाल $\frac{2}{3}$ है।**Sol. D**

$$P = (\alpha, \beta)$$

$$\frac{\alpha + 1 + 3}{3} = h / \frac{\beta + 4 - 2}{3} = k$$

$$\alpha = (3h - 4), \beta = 3k - 2 \text{ \& } (\alpha, \beta)$$

$$2(3h - 4) - 3(3k - 2) + 4 = 0$$

$$6x - 9y + 2 = 0$$

24. यदि $\frac{dy}{dx} + \frac{3}{\cos^2 x} y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ तथा $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3}$ हैं, तो $y\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{3} + e^6$

(C) $\frac{1}{3} + e^3$

(D) $-\frac{4}{3}$

Sol. B

$$(1) \text{ IF} = e^{\int \sec^2 x dx} = e^{3 \tan x}$$

$$(2) y \cdot e^{3 \tan x} = \int \sec^2 x \cdot e^{3 \tan x} dx$$

$$y \cdot e^{3 \tan x} = \frac{1}{3} e^{3 \tan x} + C \cdot \left(y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{3} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \cdot e^{3 \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3} e^{3 \tan \frac{\pi}{4}} + C \Rightarrow C = e^3$$

$$\text{then } y\left(-\frac{\pi}{4}\right), y \cdot e^{-3} = \frac{1}{3} e^{-3} + e^3 = \frac{1 + 3e^6}{3e^3} \Rightarrow y = \frac{1}{3} + e^6$$

25. यदि $\sum_{i=1}^{20} \left(\frac{{}^{20}C_{i-1}}{{}^{20}C_i + {}^{20}C_{i-1}} \right)^3 = \frac{k}{21}$, तो k बराबर हैं:

(A) 100

(B) 50

(C) 200

(D) 400

Sol. A

$$= \frac{1}{(21)^3} \left(\frac{(20)(21)}{2} \right)^2 = \frac{k}{21}$$

$$\Rightarrow k = 100$$

26. माना A रेखा $\vec{r} = (1 - 3\mu)\hat{i} + (\mu - 1)\hat{j} + (2 + 5\mu)\hat{k}$ पर स्थित एक बिंदु है तथा $B(3, 2, 6)$ एक अन्य बिंदु है, तो μ का वह मान जिसके लिए सदिश \overline{AB} समतल $x - 4y + 3z = 1$ के समांतर है, है :

(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $-\frac{1}{4}$

Sol. $\vec{r} = \langle 1, -1, 2 \rangle + \mu \langle -3, +1, 5 \rangle$

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{+1} = \frac{z-2}{5} = \mu = k$$

$$A \langle -3k + 1, k - 1, 5k + 2 \rangle$$

$$\& B = \langle 3, 2, 6 \rangle$$

$$\overline{AB} = \langle -3k - 2, +k - 3, 5k - 4 \rangle$$

$$\text{then } 1(-3k - 2) - 4(k - 3) + 3(5k - 4) = 0$$

$$k = \frac{1}{4} = \mu$$

27. माना $d \in \mathbb{R}$ तथा

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4+d & (\sin \theta) - 2 \\ 1 & (\sin \theta) + 2 & d \\ 5 & (2 \sin \theta) - d & (-\sin \theta) + 2 + 2d \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi] \text{ यदि } \det(A) \text{ का न्यूनतम मान } 8 \text{ है, तो } d \text{ का एक मान है:}$$

- (A) -7 (B) $2(\sqrt{2} + 2)$ (C) $2(\sqrt{2} + 1)$ (D) -5

Sol. D

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 4+d & (\sin \theta) - 2 \\ 1 & (\sin \theta) + 2 & d \\ 5 & (2 \sin \theta) - d & (-\sin \theta) + 2 + 2d \end{vmatrix}$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_3 - 2R_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sin \theta + 2 & d \\ 5 & 2 \sin \theta - d & 2 + 2d - \sin \theta \end{vmatrix}$$

$$= d^2 + 4d + 4 - \sin^2 \theta = (d + 2)^2 - \sin^2 \theta \text{ min. at } \sin \theta = 1$$

$$= (d+2)^2 - 1 = 8 \text{ (given)}$$

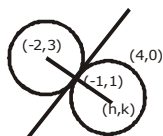
$$d = 1 \text{ or } -5$$

28. एक वृत्त C, बिंदु (4,0) से होकर जाता है तथा वृत्त $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$ को बिंदु (1, -1) पर बाह्य स्पर्श करता है, तो C की त्रिज्या है:

- (A) $\sqrt{57}$ (B) 5 (C) $2\sqrt{5}$ (D) 4

Sol. B

Let the centre of circle (-2,3)



$$\text{F.O.T} \rightarrow x \cdot 1 + y(-1) + 2(x + 1) - 3(y - 1) - 12 = 0$$

$$3x - 4y - 7 = 0$$

$$m_T = \frac{3}{4}$$

$$\frac{k-3}{h+2} \times \frac{3}{4} = -1 (\because m_T \cdot m_N = -1)$$

$$k + 3h - 7 = 0 \quad \dots(1)$$

distance of (h,k) from (-1,1) is equal to the distance from (4,0)

$$(h - 1)^2 + (k + 1)^2 = (h - 4)^2 + (k - 0)^2$$

$$-2h + 2k + 2 = -8h + 16$$

$$-2h + 2k + 2 = -8h + 16$$

$$6h + 2k - 14 = 0 \quad \dots(2)$$

from equation (1) & (2)

$$h = 4$$

$$k = -5$$

then radius

$$r = \sqrt{(4 - 4)^2 + (-5)^2} \Rightarrow r = 5$$

29. बिन्दु $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ तथा वक्र $y = \sqrt{x}$, ($x > 0$) के बीच की न्यूनतम दूरी है:

(A) $\frac{3}{2}$

(B) $\frac{5}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Sol. C

Let Pt(t, \sqrt{t})

distance formula using

$$(t, \sqrt{t}) - \left(\frac{3}{2}, 0\right)$$

$$Z = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + (\sqrt{t} - 0)^2$$

$$\frac{dz}{dt} = 2\left(t - \frac{3}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$$

$$pt = (1, \sqrt{1}) = (1, 1)$$

$$\text{Sh. distance} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

30. माना $n \geq 2$ एक प्राकृत संख्या है तथा $0 < \theta < \pi/2$ हैं, तो $\int \frac{(\sin^n \theta - \sin \theta)^{\frac{1}{n}} \cos \theta}{\sin^{n+1} \theta} d\theta$ बराबर है:

(जहाँ C एक समाकलन अचर है)

(A) $\frac{n}{n^2 - 1} \left(1 + \frac{1}{\sin^{n-1} \theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

(B) $\frac{n}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{\sin^{n-1} \theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

(C) $\frac{n}{n^2 + 1} \left(1 - \frac{1}{\sin^{n-1} \theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

(D) $\frac{n}{n^2 - 1} \left(1 - \frac{1}{\sin^{n-1} \theta}\right)^{\frac{n+1}{n}} + C$

Sol. D

$\sin^n \theta$ common :

$$\int \frac{\sin \theta (1 - \sin^{1-n} \theta)^{1/n} \cos \theta}{\sin^{n+1} \theta} d\theta$$

$$1 - \sin^{1-n} \theta = t$$

$$-(1-n) \sin^{-n} \theta \cos \theta d\theta = dt$$

$$\frac{\cos \theta d\theta}{\sin^n \theta} = \frac{dt}{n-1}$$

$$\frac{1}{n-1} \int (t)^{1/n} dt$$

$$\frac{1}{(n-1)} \left(\frac{t^{\frac{1}{n} + 1}}{\frac{1}{n} + 1} \right) + C$$