QUESTION WITH SOLUTION

DATE : 11-01-2019 _ MORNING

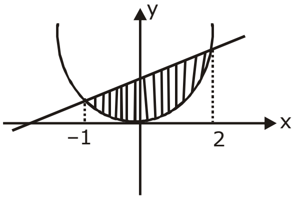
MOTION™
Nurturing potential through education
H.O. : 394, Rajeev Gandhi Nagar, Kota
www.motion.ac.in | ✉: info@motion.ac.in

[MATHEMATICS] 11-01-2019_Morning

1. वक्र $x^2 = 4y$ तथा सरल रेखा $x = 4y - 2$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{7}{8}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{9}{8}$

Sol. **D**



$x^2 = 4y$ ...(1)

$x = 4y - 2$

Solve (1) & (2)

$x^2 = 4\left(\frac{x+2}{4}\right)$

$x^2 = x + 2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$x = -1, x = 2$

Bounded area is

$A = \int_{-1}^{2}\left(\frac{x+2}{4} - \frac{x^2}{4}\right)dx$

$A = \frac{1}{4}\int_{-1}^{2}\left(x + 2 - x^2\right)dx \Rightarrow A = \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$

$A = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{4}{2} + 4 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}\right)\right\}$

$A = \frac{1}{4}\left\{\frac{10}{3} + \frac{7}{6}\right\} \Rightarrow A = \frac{27}{24}$

$A = \frac{9}{8}$ sq. units

2. यदि रैखिक समीकरण निकाय

$2x + 2y + 3z = a$

$3x - y + 5z = b$

$x - 3y + 2z = c$

जहाँ a,b,c शून्येतर वास्तविक संख्यायें हैं, के एक से अधिक हल हैं, तो :

(A) $b - c - a = 0$ (B) $a + b + c = 0$ (C) $b - c + a = 0$ (D) $b + c - a = 0$

Sol. **A**

Given equation

$2x + 2y + 3z = a$

$3x - y + 5z = b$

$x - 3y + 2z = c$

for more than one solution

$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow 2(-2 + 15) - 2(6 - 5) + 3(-9 + 1)$

$\Rightarrow 26 - 2 - 24 = 0$
$\Delta = 0$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 2 & 3 \\ b & -1 & 5 \\ c & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a(-2 + 15) - 2(2b - 5c) + 3(-3b + c) = 0$
$13a - 13b + 13c = 0$
$a - b + c = 0$

Also $\Delta_2 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a & 3 \\ 3 & b & 5 \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(2b - 5c) - a(6 - 5) + 3(3c - b) = 0$
$b - c - a = 0$
$\therefore$ from $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$
$a - b + c = 0$
or $b - c - a = 0$

3. धन पदों की एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग 3 है तथा इसके पदों के घनों (cubes) का योग $\frac{27}{19}$ है, तो इस श्रेणी का सार्व अनुपात है:

(A) $\frac{2}{9}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{4}{9}$

Sol. **B**

$S_\infty = 3$
let first term = a

$S_\infty = \frac{a}{1-r}$, $|r| < 1$

$3 = \frac{a}{1-r}$

$a = 3(1 - r)$ ....(1)
also given

sum of cubes = $\frac{27}{19}$

$\frac{a^3}{1-r^3} = \frac{27}{19}$

$19a^3 = 27(1 - r^3)$ ....(2)
Solve equation (1) & (2)
$19[3(1 - r)]^3 = 27(1 - r^3)$
$19 \times 27(1 - r)^3 = 27(1 - r)(1 + r + r^2)$
$19(1 - r)^2 = (1 + r + r^2)$
$19 + 19r^2 - 38r - 1 - r - r^2 = 0$
$18r^2 - 39r + 18 = 0$
$6r^2 - 13r + 6 = 0$
$6r^2 - 9r - 4r + 6 = 0$
$3r(2r - 3) - 2(2r - 3) = 0$

$r = \frac{3}{2}$ or $r = \frac{2}{3}$

But $|r| < 1 \therefore r = \frac{2}{3}$

4. माना $A = \begin{pmatrix} 0 & 2q & r \\ p & q & -r \\ p & -q & r \end{pmatrix}$. यदि $AA^T = I_3$, तो $|p|$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{\sqrt{6}}$

Sol. **C**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2q & r \\ p & q & -r \\ p & -q & r \end{bmatrix}$$

$A.A^T = I_3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2q & r \\ p & q & -r \\ p & -q & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & p & p \\ 2q & q & -q \\ r & -r & r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4q^2 + r^2 & 2q^2 - r^2 & -2q^2 + r^2 \\ 2q^2 - r^2 & p^2 + q^2 + r^2 & p^2 - q^2 - r^2 \\ -2q^2 + r^2 & p^2 - q^2 - r^2 & p^2 + q^2 + r^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Now, $4q^2 + r^2 = 1$

$2q^2 - r^2 = 0$,

$p^2 - q^2 - r^2 = 0$

$p^2 + q^2 + r^2 = 1$

Solving

$$\begin{array}{l} 4q^2 + r^2 = 1 \\ \underline{2q^2 - r^2 = 0} \\ 6q^2 = 1 \end{array}$$

$q^2 = \frac{1}{6}$

$q = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Soving

$r^2 = 2q^2$

$r^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore p^2 = q^2 + r^2$

$p^2 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

$p^2 = \frac{1}{2}$

$|P| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. यदि अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx}+\left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}$, $x > 0$ का हल $y(x)$ है, जहाँ $y(1) = \frac{1}{2}e^{-2}$, तोः

(A) $\left(\frac{1}{2},1\right)$ में $y(x)$ ह्रासमान है।
(B) $y(\log_e 2) = \frac{\log_e 2}{4}$
(C) $y(\log_e 2) = \log_e 4$
(D) $(0, 1)$ में $y(x)$ ह्रासमान है।

Sol. A

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y = e^{-2x}, x > 0$$

it is linear differential equation.

$$\text{I.F.} = e^{\int\left(2+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{(2x+\ell nx)} = e^{2x}.\, e^{\ln x} = x.e^{2x}$$

$$\therefore \text{I.F.} = x.e^{2x}$$

$$x.e^{2x}\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x+1}{x}\right)y.\,x.e^{2x} = x.e^{2x}.\, e^{-2x}$$

$$\int d\left(y.x.e^{2x}\right) = \int x\,dx$$

$$y.x.e^{2x} = \frac{x^2}{2}+C$$

Now given $y(1) = \frac{1}{2}.e^{-2}$

$$\therefore \frac{1}{2}.e^{-2}.(1).e^{2} = \frac{1}{2}+C \Rightarrow C = 0$$

$$\therefore y.x.e^{2x} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = \frac{x.e^{-2x}}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-2x}}{2}+\frac{x.e^{-2x}(-2)}{2} = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{-2x}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

$\therefore$ when $x > \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} < 0$

$\therefore$ $y(x)$ is decreasing in $\left(\frac{1}{2},1\right)$

6. माना $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \le x < 0 \\ x^2-1, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$ तथा $g(x) = |f(x)| + f(|x|)$, तो अंतराल $(-2,2)$ में g:

(A) दो बिन्दुओं पर अवकलनीय नहीं है
(B) सभी बिन्दुओं पर अवकलनीय है
(C) एक बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है
(D) संगत नहीं है

Sol. C

$$|f(x)| = \begin{cases} 1, & -2 \le x < 0 \\ 1-x^2, & 0 \le x < 1 \\ x^2-1, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

and $f(|x|) = x^2 - 1$, $x \in [-2,2]$

Hence $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-2,0) \\ 0, & x \in [0,1) \\ 2(x^2-1), & x \in [1,2] \end{cases}$

It is not differentiable at x = 1

7. एक त्रिभुज की दो भुजाओं की लम्बाई का योग x है और इन्ही दो भुजाओं की लम्बाई का गुणनफल y है। यदि $x^2 - c^2 = y$, जहाँ c त्रिभुज की तीसरी भुजा की लम्बाई है, तब त्रिभुज के परिवत्त की त्रिज्या है :

(A) $\frac{c}{\sqrt{3}}$ (B) $\frac{y}{\sqrt{3}}$ (C) $\frac{c}{3}$ (D) $\frac{3}{2}y$

Sol. **A**

In ΔABC

a + b = x & ab = y

$x^2 - c^2 = y$

$(a + b)^2 - c^2 = ab$

$a^2 + b^2 + 2ab - c^2 = ab$

$a^2 = b^2 - c^2 = -ab$

$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ = -1/2 $\therefore \cos C = -\frac{1}{2} \therefore \angle C = 120$

$\therefore R = \frac{C}{2\sin C}$

$\therefore R = \frac{C}{2.\sin 120^\circ} = \frac{c}{2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\therefore r = \frac{C}{\sqrt{3}}$

8. बिन्दुओं (0,–1,0) तथा (0,0,1) से होकर जाने वाले तथा समतल y – z + 5 = 0 के साथ $\frac{\pi}{4}$ का कोण बनाने वाले समतल के अभिलम्ब के दिक् अनुपात (direction ratios) है:

(A) $2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (B) 2, – 1, 1 (C) $\sqrt{2}, 1, -1$ (D) $2\sqrt{3}, 1, -1$

Sol. **C**

A(0,–1,0)

B(0,0,1)

Points A & B lies in the plane

$\therefore \overline{AB}$ also lies m plane

$\overline{AB} = 0\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

another plane P_2 is y – z + 5 = 0

$\therefore \vec{n}_2 = 0\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

Let plane is ax + by + cz + d = 0

$\vec{n} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

this $\vec{n} \perp \overline{AB}$

$\therefore \vec{n}.\overline{AB} = 0$

a(0) + b(1) + c(1) = 0

b + c = 0

b = – c

angle b/w planes is $\frac{\pi}{4}$

$\therefore \cos\frac{\pi}{4} = \left|\frac{\vec{n}.\vec{n}_2}{|\vec{n}||\vec{n}_2|}\right|$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left|\frac{b-c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{2}}\right| \Rightarrow 1 = \left|\frac{2b}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right| \Rightarrow 4b^2 = a^2 + 2b^2$

$a^2 = 2b^2$

$a = \pm\sqrt{2}\,b$

or $a = \pm\sqrt{2}\,c$

& $b = -c$

$\therefore$ Direction ratios are

$\left(\sqrt{2},-1,1\right)$ or $\left(\sqrt{2},1,-1\right)$

9. r का वह मान, जिसके लिए ${}^{20}C_r{}^{20}C_0 + {}^{20}C_{r-1}{}^{20}C_1 + {}^{20}C_{r-2}{}^{20}C_2 + \ldots + {}^{20}C_0{}^{20}C_r$ अधिकतम है, है:

(A) 15 (B) 20 (C) 11 (D) 10

Sol. **B**

${}^{20}C_r{}^{20}C_0 + {}^{20}C_{r-1}{}^{20}C_1 + {}^{20}C_{r-2}{}^{20}C_2 + \ldots + {}^{20}C_0{}^{20}C_r$

$(1 + x)^{20}(1 + x)^{20}$

sum is ${}^{40}C_r$

maximum when r = 20

10. समुच्चय {1,2,....,11} से दो पूर्णांक यादच्छिक लिए गये हैं। दिया है कि ली गई संख्याओं का योग सम है, दोनों संख्याओं के सम होने की सप्रतिबंध (conditional) प्रायिकता है:

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{7}{10}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{2}$

Sol. **C**

either both even or both odd

required probability = $\frac{{}^5C_2}{{}^5C_2 + {}^6C_2}$

$= \frac{10}{10+15} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

11. माना $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3 = \frac{x+iy}{27}\left(i=\sqrt{-1}\right)$, जहाँ x तथा y वास्तविक संख्याये हैं, तो y – x बराबर है :

(A) –85 (B) –91 (C) 91 (D) 85

Sol. **C**

$\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3 = \frac{x+iy}{27}$

$\left(\frac{-6-i}{3}\right)^3 = \frac{x+iy}{27}$

$-\frac{(6+i)^3}{27} = \frac{(x+iy)}{27}$

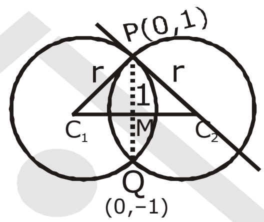
$-(216 + 108i + 18i^2 + i^3) = (x + iy)$
$-(216 + 108i - 18 - i) = (x + iy)$
$-(198 + 107i) = x + iy$
$x = -198,\ y = -107$
$\therefore\ y - x = -107 + 198 = 91$

12. बराबर त्रिज्या के दो वत्त, बिन्दुओं (0,1) तथा (0,–1) पर काटते हैं। इनमें से एक वत्त के बिन्दु (0,1) पर स्पर्श रेखा दूसरे वत्त के केन्द्र से होकर जाती है, तो इन वत्तों के केन्द्रों के बीच की दूरी है :

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $2\sqrt{2}$

Sol. C

In ΔC_1PC_2
$r^2 + r^2 = (C_1C_2)^2$
$(C_1C_2)^2 = 2r^2$
$C_1C_2 = \sqrt{2}\,r$
In ΔC_1MP
$r^2 = 1 + (C_1M)^2$
$r^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}\,r}{2}\right)^2$
$r^2 = 1 + \frac{r^2}{2}$
$2r^2 - r^2 - 2 = 0$
$r = \sqrt{2}$
$\therefore\ C_1C_2 = 2$



13. यदि $x\log_e(\log_e x) - x^2 + y^2 = 4\ (y > 0)$, तो $x = e$ पर $\frac{dy}{dx}$ बराबर है :

(A) $\frac{e}{\sqrt{4+e^2}}$ (B) $\frac{(1+2e)}{\sqrt{4+e^2}}$ (C) $\frac{(1+2e)}{2\sqrt{4+e^2}}$ (D) $\frac{(2e-1)}{2\sqrt{4+e^2}}$

Sol. D

$x\log_e(\log_e x) - x^2 + y^2 = 4,\ (y > 0).$ ...(1)

$\log_e(\log_e x) + x.\frac{1}{\log_e x}.\frac{1}{x} - 2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$

put x = e

$\log_e(\log_e e) + e.\frac{1}{\log_e e}.\frac{1}{e} - 2e + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$

$\log_e(1) + 1 - 2e + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$ ...(2)

from equation (1) at x = e
$e\log_e(\log_e e) - e^2 + y^2 = 4$
$y^2 = 4 + e^2$
$y = \sqrt{4+e^2}$
put $y = \sqrt{4+e^2}$ in equation (2)

$\therefore\ 1 - 2e + 2\sqrt{4+e^2}.\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2e-1}{2\sqrt{4+e^2}}$

14. यदि q असत्य है तथा $p \wedge q \leftrightarrow r$ सत्य है, तो निम्न में से कौनसा कथन एक पुनरूक्ति (tautology) है?

(A) $p \vee r$ (B) $(p \wedge r) \rightarrow (p \vee r)$ (C) $(p \vee r) \rightarrow (p \wedge r)$ (D) $p \wedge r$

Sol. **B**

q : F

$(p \wedge q) \leftrightarrow r : T$

Case I

$p \wedge q : T$ and r : T

It is not possible when q :F

Case II

$p \wedge q : F$ and r : F

P : T or F q : F, r : F

1. $p \vee r$

$T \vee F : T$

$f \vee f : f$

2. $(p \wedge r) \rightarrow (p \vee r)$

$T \wedge f \rightarrow T \vee F$

$F \rightarrow T : T$

$F \wedge F \rightarrow F \vee F$

$F \rightarrow F : T$

3. $(p \vee r) \rightarrow (p \wedge r)$

$T \wedge f \rightarrow (T \wedge F)$

$T \rightarrow F : F$

$F \vee F \rightarrow F \wedge F$

$F \rightarrow F : T$

(4) $p \wedge r$

$T \wedge F : F$

$T \wedge F : F$

15. परवलय $y^2 = 4x$ तथा अतिपरवलय $xy = 2$ की एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण है :

(A) $x + 2y + 4 = 0$ (B) $x - 2y + 4 = 0$ (C) $x + y + 1 = 0$ (D) $4x + 2y + 1 = 0$

Sol. **A**

$y^2 = 4x$ & $xy = 2$.

for parabola $y^2 = 4x$

let tangent is $y = mx + \frac{1}{m}$ ...(1)

it also touches hyperbola $xy = 2$ ...(2)

$\therefore$ solve (1) & (2) & apply D = 0

$x\left(mx + \frac{1}{m}\right) = 2$

$m^2x^2 - 2m + x = 0 \Rightarrow D = 0$

$(1)^2 - 4(m^2)(-2m) = 0$

$8m^3 = -1,\ m^3 = -\frac{1}{8}$

$m = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ common tangent is

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{(-1/2)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 2$$

$x + 2y + 4 = 0$

16. माना $a_1, a_2, ...,a_{10}$ एक गुणोत्तर श्रेढ़ी है। यदि $\frac{a_3}{a_1} = 25$, तो $\frac{a_9}{a_5}$ बराबर है:

(A) 5^4 (B) 5^3 (C) $2(5^2)$ (D) $4(5^2)$

Sol. **A**

$a_1, a_2......,a_{10} \to GP$

$a, ar, ar^2,.......,ar^9 \to GP$

$$\frac{a_3}{a_1} = 25 \Rightarrow \frac{ar^2}{a} = 25$$

$r = \pm 5$

$$\frac{a_9}{a_5} = \frac{ar^8}{ar^4} \Rightarrow r^4$$

$\therefore r^4 = (25)^2 = 5^4$

17. 30 आइटम (items) का परिणाम देखा गया; इनमें से 10 आइटम में प्रत्येक ने परिणाम $\frac{1}{2} - d$ दिया, 10 आइटम में प्रत्येक ने परिणाम $\frac{1}{2}$ दिया तथा बाकी 10 आइटम में प्रत्येक ने परिणाम $\frac{1}{2} + d$ दिया। यदि इन आँकड़ों का प्रसरण $\frac{4}{3}$ है, तो $|d|$ बराबर है :

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) 2

Sol. **A**

variance is independent of origin shift data by $\frac{1}{2}$.

$$\sum \frac{x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 =$$

$$\frac{10d^2 + 10 \times (0)^2 + 10d^2}{30} - (0)^2 = \frac{4}{3}$$

$d^2 = 2 \Rightarrow |d| = \sqrt{2}$

18. यदि द्विघात समीकरण $81x^2 + kx + 256 = 0$ का एक मूल दूसरे मूल का घन (cube) है, तो k का एक मान है :

(A) 144 (B) –81 (C) 100 (D) –300

Sol. **D**

$81x^2 + kx + 256 = 0$

roots are α & α^3

$$\alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{81}$$

$$\alpha^4 = \frac{256}{81}$$

$\alpha = \pm \frac{4}{3}$ $\therefore \alpha + \alpha^3 = -\frac{k}{81}$

$\frac{4}{3} + \frac{64}{27} = -\frac{k}{81}$

$\therefore$ k = – 300

19. उपयुक्त पूर्णांक m तथा एक फलन A(x) के लिए यदि $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx = A(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m + C$, जहाँ C एक समाकलन अचर है, तो $(A(x))^m$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{9x^4}$ (B) $\frac{1}{27x^6}$ (C) $\frac{-1}{27x^9}$ (D) $\frac{-1}{3x^3}$

Sol. **C**

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx = A(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m + C$$

$$\int \frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x^4} dx = A(x)\left(\sqrt{1-x^2}\right)^m + C$$

Put $\left(\frac{1}{x^2}-1\right) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{-2}{x^3}$

$$\therefore -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt \Rightarrow \frac{-t^{3/2}}{3} + C$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{-3x^2} + C$$

$\therefore A(x) = -\frac{1}{3x^3}$ & m = 3

$$A((x))^3 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3x^3}\right)^3$$

$$= \frac{-1}{27x^9}$$

20. समुच्चय $S = \{x \in R : x^2 + 30 \le 11x\}$ पर फलन $f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 27x - 40$ का अधिकतम मान है:

(A) 122 (B) –122 (C) –222 (D) 222

Sol. **A**

$f(x) = 3x^3 - 18x^2 + 27x - 40$

$f'(x) = 9x^2 - 36x + 27$

$f'(x) = 9(x^2 - 4x + 3)$

$f'(x) = 9(x - 1)(x - 3)$

Now $S = \{x \in R, x^2 + 30 - 11x \le 0\}$

$= \{x \in R, x \in [5,6]\}$

$\therefore$ where $x \in [5,6]$, $f'(x)$ is positive

$\therefore$ f(x) is increasing in [5,6]

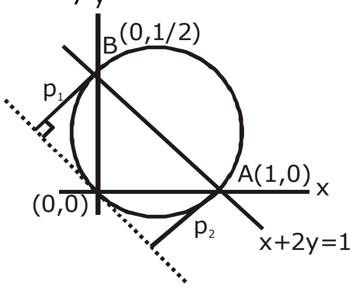
$\therefore$ max. value, f(6) = 122

21. सरल रेखा $x + 2y = 1$ निदेशांक अक्षों को A तथा B पर काटती है। मूल बिन्दु, A तथा B से होकर जाने वाला वत्त खींचा गया है, तो मूल बिन्दु पर वत्त की स्पर्श रेखा की A तथा B से लम्बवत दूरियों का योग है:

(A) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ (B) $4\sqrt{5}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $2\sqrt{5}$

Sol. **C**

$x + 2y = 1$



equation of circle

$(x - 1)(x - 0) + (y - 0)(y - 1/2) = 0$

$x^2 + y^2 - x - \frac{y}{2} = 0$

Tangent at (0,0) is

From T = 0

$0 + 0 - \left(\frac{x+0}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y+0}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2x + y = 0$

$p_1 + p_2 = \left|\frac{0+\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}\right| + \left|\frac{2+0}{\sqrt{5}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}$

$p_1 + p_2 = \frac{5}{2\sqrt{5}} \Rightarrow p_1 + p_2 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

22. समतल, जिसमें रेखा $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ अन्तर्विष्ट है तथा इस रेखा का समतल $2x + 3y - z = 5$ पर प्रक्षेप (projection) भी अन्तर्विष्ट है, पर निम्न में से कौन सा बिन्दु स्थित है?

(A) (–2,2,2) (B) (0, – 2, 2) (C) (2,0,–2) (D) (2,2,0)

Sol. **C**

line. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ & $P_1 \equiv 2x + 3y - z = 5$

$\bar{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k} \;\therefore\; \bar{n}_1 = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

normal vector of required plane is $\perp$ to $\bar{b}$ & $\bar{n}_1$

$\therefore\ \vec{n} = \bar{b} \times \bar{n}_1$

$\bar{n} = -8\hat{i} + 8\hat{j} + 8\hat{k}$

$\therefore$ D.R.'s of $\bar{n}$ of required plane are – 1,1,1

$\therefore$ equation of required plane is

$-1(x - 3) + 1(y + 2) + 1(z - 1) = 0$

$-x + y + z + 4 = 0$

$x - y - z - 4 = 0$

it is the required plane

Now check options

23. माना [x], x के समान या उससे कम महत्तम पूर्णांक को दर्शाता है, तो

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)+(|x|-\sin(x[x]))^2}{x^2}$$

(A) का अस्तित्व नहीं है (B) 0 के बराबर है (C) $\pi + 1$ के बराबर है (D) π के बराबर है

Sol. **A**

RHL

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)+(|x|-\sin(x[x]))^2}{x^2}$$

where $x \to 0^+$, $[x] = 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)+x^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan(\pi\sin^2 x)}{(\pi\sin^2 x)}\times\frac{(\pi\sin^2 x)}{x^2}\right)+1$$

$\therefore$ RHL $= \pi + 1$

LHL

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)+(|x|-\sin(x[x]))^2}{x^2}$$

as $x \to 0^+$, $[x] = -1$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-}\frac{\tan(\pi\sin^2 x)+(-x+\sin x)^2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\tan(\pi\sin^2 x)}{(\pi\sin^2 x)}\times\frac{(\pi\sin^2 x)}{x^2}\right)+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2-1$$

$\therefore$ LHS $= \pi$

$\therefore$ RHL $\neq$ LHL

$\therefore$ Limit does not exist

24. समाकल $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{\sin^2 x}{\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}dx$ (जहाँ [x], x के समान या उससे कम महत्तम पूर्णांक को दर्शाता है) का मान है:

(A) sin 4 (B) 4 (C) 4 – sin4 (D) 0

Sol. **D**

$$I = \int_{-2}^{2}\frac{\sin^2 x}{\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}dx$$

$$I = \int_{0}^{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}+\frac{\sin^2(-x)}{\left[-\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}\right)dx \qquad \left(\left[\frac{x}{\pi}\right]+\left[\frac{-x}{\pi}\right]=-1 \text{as } x\neq n\pi\right)$$

$$I = \int_{0}^{2}\left(\frac{\sin^2 x}{\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}+\frac{\sin^2 x}{-1-\left[\frac{x}{\pi}\right]+\frac{1}{2}}\right)dx = 0$$

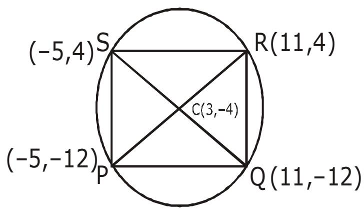
25. निर्देशांक अक्षों के समान्तर भुजाओं का एक वर्ग, वत्त $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 103 = 0$ के अंतर्गत है, तो इस वर्ग का वह शीर्ष जो मूल बिन्दु के सबसे निकट है, की दूरी है :

(A) 6 (B) $\sqrt{41}$ (C) $\sqrt{137}$ (D) 13

Sol. **B**

$x^2 + y^2 - 6x + 8y - 103 = 0$

center $(3, -4)$, $r = \sqrt{9+16+103} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$



$CP = CR = CQ = CS = 8\sqrt{2}$

$R = \left(3 + 8\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}, -4 + 8\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$R \equiv (11, 4)$ $\therefore$ $OR = \sqrt{137}$

$p \equiv \left(3 - 8\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}, -4 - 8\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$P \equiv (-5, -12)$ $\therefore$ $OP = 13$

$\therefore$ $Q \equiv (11, -12)$ & $S \equiv (-5, 4)$

$\therefore$ $OQ = \sqrt{265}$ $\therefore$ $OS = \sqrt{41}$

$\therefore$ Minimum distance from origin is $\sqrt{41}$

26. माना $f : R \to R$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in R$. द्वारा परिभाषित किया गया है, तो f का परिसर है :

(A) $(-1,1) - \{0\}$ (B) $R - \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (C) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (D) $R - [-1,1]$

Sol. **C**

$f(0) = 0$ & $f(x)$ is odd.

Further, If $x > 0$ then

$f(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{X}} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$

Hence, $f(x) \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

27. माना $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + (\lambda^2 - 1)\hat{k}$ समतलीय सदिश हैं, तो शून्येत्तर सदिश $\vec{a} \times \vec{c}$ है :

(A) $-10\hat{i} + 5\hat{j}$ (B) $-14\hat{i} - 5\hat{j}$ (C) $-14\hat{i} + 5\hat{j}$ (D) $-10\hat{i} - 5\hat{j}$

Sol. **A**

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ are coplanar

$\therefore \left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & \lambda & 4 \\ 2 & 4 & \lambda^2 - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda(\lambda^2 - 1) - 16 - 2(\lambda^2 - 1 - 8) + 4(4 - 2\lambda) = 0$

$\lambda^3 - \lambda - 16 - 2\lambda^2 + 18 + 16 - 8\lambda$

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$

$l^2(\lambda - 2) - 9(\lambda - 2) = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9) = 0$

$\lambda = 2$, $\lambda = \pm 3$

Now $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + (\lambda^2 - 1)\hat{k}$

when $\lambda = \pm 3$, $\vec{a} \,||\, \vec{c}$ $\therefore \lambda \neq \pm 3$

$\therefore \lambda = 2$

$\vec{c} = 2\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{c} = -10\hat{i} + 5\hat{j}$

28. यदि दीर्घवत $x^2 + 2y^2 = 2$ के चार शीर्षो के अतिरिक्त इसके सभी बिन्दुओं पर स्पर्श रेखायें खींची गई है, तो इन स्पर्श रेखाओं के निदेशांक अक्षों के बीच के अन्तःखण्डों के मध्य बिन्दु निम्न में से किस वक्र पर है?

(A) $\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$ (B) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ (C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ (D) $\frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2y^2} = 1$

Sol. **A**

Equation of generel tangent on ellipse

$$\frac{x}{a\sec\theta} + \frac{y}{b\,\mathrm{cosec}\theta} = 1$$

$a = \sqrt{2}$, $b = 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}\sec\theta} + \frac{y}{\mathrm{cosec}\theta} = 1$$

let the midpoint be (h,k)

$h = \frac{\sqrt{2}\sec\theta}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}h}$

and $k = \frac{\mathrm{cosec}\theta}{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2k}$

$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{4k^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4y^2} = 1$

29. x के उन वास्तविक मानों जिनके लिए $\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3}{x}\right)^8$ के द्विपद प्रसार का मध्य पद 5670 है, का योग है:

(A) 0 (B) 8 (C) 6 (D) 4

Sol. **A**

$T_5 = {}^8C_4 \frac{x^{12}}{81} \times \frac{81}{x^4} = 5670$

$\Rightarrow 70x^8 = 5670$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

30. माना k = 1,2,3..... के लिए $f_k(x) = \frac{1}{k}\left(\sin^k x + \cos^k x\right)$ तो सभी $x \in R$ के लिए, $f_4(x) - f_6(x)$ का मान बराबर है :

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{-1}{12}$ (D) $\frac{5}{12}$

Sol. B

$f_4(x) - f_6(x)$

$= \frac{1}{4}\left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) - \frac{1}{6}\left(\sin^6 x + \cos^6 x\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{6}\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) = \frac{1}{12}$