QUESTION WITH SOLUTION

DATE : 11-01-2019 _ EVENING

1. यदि $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a + b + c)(x + a + b + c)^2$, $x \neq 0$ तथा $a + b + c \neq 0$, तो x बराबर है:

(A) 2(a + b + c) (B) –(a + b + c) (C) abc (D) –2(a + b + c)

Sol. **D**

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

$$(a+b+c)^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -1 & 0 \\ 2c & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Now

$(a+b+c)(a+b+c)^2 = (a+b+c)(x+a+b+c)^2$

x = 0, – 2(a+b+c)

2. माना K(x के) उन सभी वास्तविक मानों का समुच्चय है जहाँ फलन $f(x) = \sin|x| - |x| + 2(x - \pi)\cos|x|$ अवकलनीय नहीं है, तो समुच्चय K बराबर है:

(A) ϕ (एक रिक्त समुच्चय) (B) $\{\pi\}$ (C) {0} (D) $\{0, \pi\}$

Sol. **A**

$f(x) = \sin|x| - |x| + 2(x - \pi)\cos|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - x + 2(x-\pi)\cos x \ ; \ x \geq 0 \\ -\sin x + x + 2(x-\pi)\cos x \ ; \ x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x - 1 + 2\cos x - 2\sin x(x-\pi); \ x \geq 0 \\ -\cos x + 1 + 2\cos x - 2\sin x(x-\pi); \ x < 0 \end{cases}$$

$f'(0^+) = 2$

$f(0^-) = 2$

$f'(\pi) = -4$

$\Rightarrow (K \, \varepsilon \, \phi)$

3. माना एक फलन $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ द्वारा परिभाषित है, तो f :

(A) केवल एकैकी है।

(B) आच्छादी है पर एकैकी नहीं है।

(C) एकैकी और आच्छादी दोनों हैं।

(D) न एकैकी है न आच्छादी है।

Sol. **D**

$f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

$$f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$$

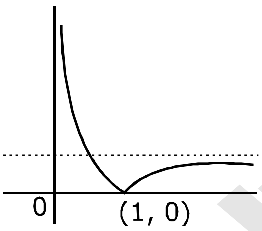
$$f(x) = \left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$\frac{x-1}{x} \ ; x < 0$$

$$\frac{-(x-1)}{x} \ ; 0 < x \le 1$$

$$\frac{(x-1)}{x} \ ; x > 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x} \ ; 0 < x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x} ; x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2} \ ; \ 0 < x \le 1 \ \rightarrow \text{decreasing} \\ \dfrac{1}{x^2} \ ; \ x > 1 \ \rightarrow \text{increasing} \end{cases}$$



(Neither injective Nor surjective)

4. माना A तथा B, 3 × 3 कोटि के दो व्युतक्रमणीय आव्यूह हैं। यदि $\det(ABA^T) = 8$ तथा $\det(AB^{-1}) = 8$, तो $\det(BA^{-1}B^T)$ बराबर है :

(A) 16 (B) 1 (C) $\frac{1}{16}$ (D) $\frac{1}{4}$

Sol. **C**

$$|ABA^T| = 8 \Rightarrow |A|^2 |B| = 8$$

$$|AB^{-1}| = 8 \Rightarrow \frac{|A|}{|B|} = 8$$

Now, $\det(BA^{-1}B^T) = \dfrac{|B|^2}{|A|} =$

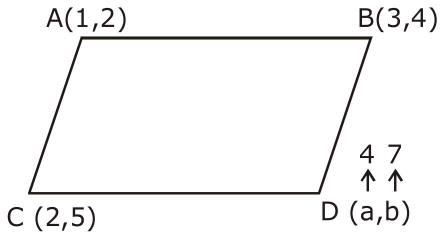
$|A|^3 = 64 \ \Rightarrow \ |A| = 4 \ \& \ |B| = \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{|B|^2}{|A|} = \frac{1}{16}$$

5. यदि एक समान्तर चतुर्भुज ABDC के बिन्दुओं A, B तथा C के निर्देशांक क्रमशः (1, 2), (3, 4) तथा (2, 5) है, तो विकर्ण AD का समीकरण है :

(A) $3x + 5y - 13 = 0$ (B) $3x - 5y + 7 = 0$
(C) $5x + 3y - 11 = 0$ (D) $5x - 3y + 1 = 0$

Sol. D



a + 1 = 5 & b + 2 = 9

a = 4 b = 7

eq. of AD is :

$$y - 2 = (x - 1) \times \frac{5}{3}$$

$$3y - 6 = 5x - 5$$

$$5x - 3y + 1 = 0$$

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = (x-y)^2$, जबकि $y(1) = 1$ है, का हल है :

(A) $\log_e\left|\frac{2-x}{2-y}\right| = x - y$

(B) $-\log_e\left|\frac{1-x+y}{1+x-y}\right| = 2(x-1)$

(C) $-\log_e\left|\frac{1+x-y}{1-x+y}\right| = x + y - 2$

(D) $\log_e\left|\frac{2-y}{2-x}\right| = 2(y-1)$

Sol. B

$$\frac{dy}{dx} = (x-y)^2$$

$$x - y = t$$

$$1 - \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}$$

$$1 - \frac{dt}{dx} = t^2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = 1 - t^2$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \int dx$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = x + c$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x+y}{1+x-y}\right) = x + c$$

$x = 1, \quad y = 1$

$\ln(1) = 1 + c \Rightarrow c = -1$

7. यदि $\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}dx = f(x)\sqrt{2x-1} + C$, है, जहाँ C एक समाकलन अचर है, तो f(x) बराबर है :

(A) $\frac{2}{3}(x-4)$ (B) $\frac{1}{3}(x+1)$ (C) $\frac{1}{3}(x+4)$ (D) $\frac{2}{3}(x+2)$

Sol. **C**

Put $2x - 1 = t^2$

$$\int \frac{\frac{t^2+1}{2}+1}{t} \times t\,dt$$

$$\int \frac{t^2+3}{2}\,dt$$

$$\frac{t^3}{6}+\frac{3t}{2}+C$$

$$t\left[\frac{t^2}{6}+\frac{3}{2}\right]+C$$

$$\sqrt{2x-1}\left\{\frac{x+4}{3}\right\}+C$$

8. यदि एक शून्येतर समान्तर श्रेढ़ी का 19वां पद शून्य है, तो इसका (49वां पद) :(29वां पद) है:

(A) 3 : 1 (B) 2 : 1 (C) 1 : 3 (D) 4 : 1

Sol. **A**

$T_{19} = 0 \Rightarrow a + 18\,d = 0$

$$\frac{T_{49}}{T_{29}} = \frac{a+48d}{a+28d} \Rightarrow \frac{(48-18)d}{(28-18)\,d}$$

$$= \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$$

9. कथन,

''यदि दो संख्याएँ बराबर नहीं है, तो उनके वर्ग भी बराबर नहीं है'' का प्रतिधनात्मक (Contrapositive) कथन है:

(A) यदि दो संख्याओं के वर्ग बराबर है, तो संख्याएँ बराबर है

(B) यदि दो संख्याओं के वर्ग बराबर है, तो संख्याएँ बराबर नहीं है।

(C) यदि दो संख्याओं के वर्ग बराबर नहीं है, तो संख्याएँ बराबर है

(D) यदि दो संख्याओं के वर्ग बराबर नहीं है, तो संख्याएँ बराबर नहीं है

Sol. **A**

Contrapositive of $p \rightarrow q$ is $\sim q \rightarrow \sim p$

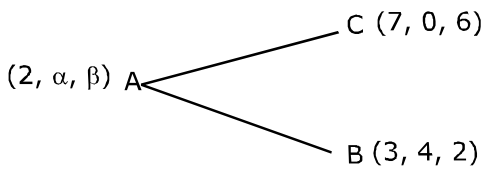
So, check $\sim q \rightarrow \sim p$ from the options

10. यदि बिंदु $(2, \alpha, \beta)$ उस समतल पर स्थित है जो बिंदुओं (3, 4, 2) तथा (7, 0, 6) से होकर जाता है तथा समतल 2x – 5y = 15, के लम्बवत है, तो $2\alpha - 3\beta$ बराबर है:

(A) 5 (B) 7

(C) 17 (D) 12

Sol. **B**



$$\overrightarrow{n_P}\,.\,\vec{n} = \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right).(2,-5,0) = \left[(\alpha+\beta-6)\hat{i}+(\beta-1)\hat{j}+(5-\alpha)\hat{k}\right].(2,-5,0)$$

Now, $2(\alpha+\beta-6) - 5(\beta-1) = 0$

$2\alpha - 3\beta = 7$

11. माना सभी $x \in R$ के लिए $(x + 10)^{50} + (x - 10)^{50} = a_0 + a_1x + a_2 x^2 + ... + a_{50}x^{50}$, तो $\frac{a_2}{a_0}$ बराबर है:

(A) 12.75 (B) 12.00 (C) 12.50 (D) 12.25

Sol. **D**

$(10+x)^{50} = {}^{50}C_0(10)^{50} + {}^{50}C_1(10)^{49}x.....+{}^{50}C_{50}x^{50}$

$(10-x)^{50} = {}^{50}C_0(10)^{50} - {}^{50}C_1(10)^{49}x.....+{}^{50}C_{50}x^{50}$

$(10+x)^{50} + (10-x)^{50} = 2\left[(10)^{50} + {}^{50}C_2(10)^{48}x^2 + ...\right]$

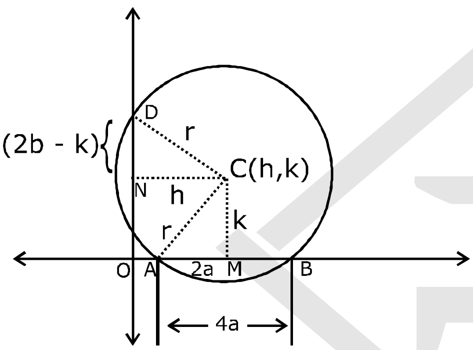
$\Rightarrow \frac{a_2}{a_0} = \frac{{}^{50}C_2 \times 10^{48}}{10^{50}} = \frac{{}^{50}C_2}{10^2}$

$= 12.25$

12. एक वत्त x-अक्ष पर एक जीवा काटता है जिसकी लंबाई 4a है तथा यह वत्त y-अक्ष के एक बिन्दु से हो कर जाता है जिसकी मूलबिंदु से दूरी 2b है। तो वत्त के केन्द्र का बिंदुपथ (locus) है:

(A) एक दीर्घवत्त (B) एक परवलय (C) एक सरल रेखा (D) एक अतिपरवलय

Sol. **B**



$r^2 = k^2 + (2a)^2 = h^2 + (2b - k)^2$

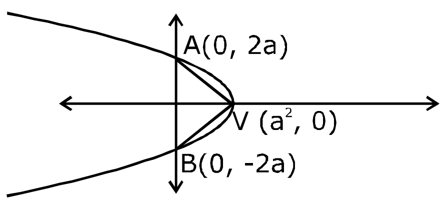
$x^2 - 4by + 4b^2 - 4a^2 = 0$

parabola

13. यदि एक त्रिभुज, जिसका एक शीर्ष परवलय $y^2 + 4(x - a^2) = 0$ के शीर्ष पर है तथा अन्य दो शीर्ष परवलय तथा y-अक्ष के प्रतिच्छेदन बिंदुओं पर हैं, का क्षेत्रफल 250 वर्ग इकाई है, तो 'a' का एक मान है :

(A) $5\sqrt{5}$ (B) 5 (C) $(10)^{2/3}$ (D) $5(2^{1/3})$

Sol. **B**



$y^2 + 4(x - a^2) = 0$

v $(a^2, 0)$

at y - axis, x = 0

$\Rightarrow y^2 = 4a^2 \Rightarrow y = \pm 2a$

Now, $\Delta = \frac{1}{2}.a^2.4a = 250$

a = 5 or – 5

14. परवलय $y = x^2 + 1$, इस के एक बिंदु (2, 5) पर खींची गई स्पर्श रेखा तथा निर्देशांक अक्षों द्वारा प्रथम चतुर्थांश में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (वर्ग इकाइयों में) है :

(A) $\frac{187}{24}$ (B) $\frac{8}{3}$ (C) $\frac{37}{24}$ (D) $\frac{14}{3}$

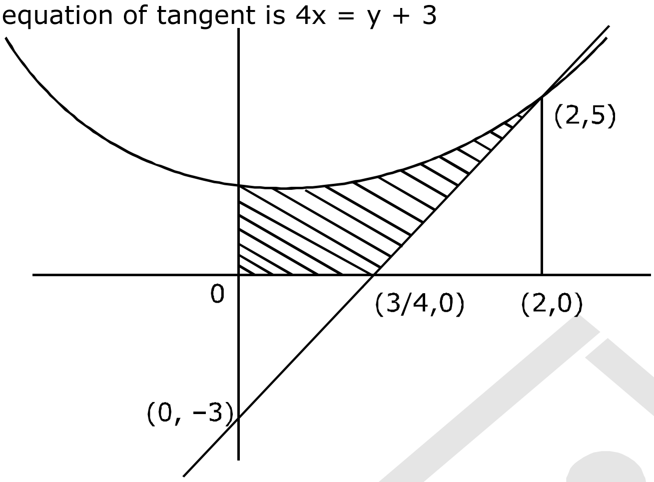
Sol. **C**

$x^2 = y - 1$

$T = 0$

$2 \times 2x = y + 5 - 2$

equation of tangent is $4x = y + 3$



$$\int_0^2 (x^2 + 1)\, dx - \frac{1}{2} \times (2 - 3/4) \times 5$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + x\right)_0^2 - \frac{25}{8}$$

$$\frac{8}{3} + 2 - \frac{25}{8} \Rightarrow \frac{14}{3} - \frac{25}{8} \Rightarrow \frac{112 - 75}{24} \Rightarrow \frac{37}{24}$$

15. वे सभी x, जो असमीकरण $(\cot^{-1}x)^2 - 7(\cot^{-1}x) + 10 > 0$ को संतुष्ट करते हैं, निम्न में से किस अन्तराल में है?

(A) $(-\infty, \cot 5) \cup (\cot 4, \cot 2)$ (B) $(\cot 5, \cot 4)$

(C) $(-\infty, \cot 5) \cup (\cot 2, \infty)$ (D) $(\cot 2, \infty)$

Sol. **D**

$t^2 - 7t + 10 > 0$

$t < 2$ or $t > 5$

$\cot^{-1}x < 2$ or $x > \cot 2$

$x \in (\cot 2, \infty)$

16. माना $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}, x \in R$ जहाँ a, b तथा d शून्येतर वास्तविक अचर हैं, तो :

(A) f, x का न तो वर्धमान न ही ह्रसमान फलन है।

(B) f, x ह्रसमान फलन है।

(C) f', x का संतत फलन नहीं है।

(D) f, x का एक वर्धमान फलन है।

Sol. **D**

$$f'(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{(a^2+x^2)} - \left\{\frac{-\sqrt{b^2+(d-x)^2} - (d-x)\left[\dfrac{-2(d-x)}{2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}\right]}{b^2+(d-x)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}} + \left\{\frac{b^2}{\left[b^2+(d-x)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$> 0 \Rightarrow$ Increasing function

17. माना $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ तथा $T_n = 1 + \left(\frac{q+1}{2}\right) + \left(\frac{q+1}{2}\right)^2 + ... + \left(\frac{q+1}{2}\right)^n$, जहाँ q एक वास्तविक संख्या है तथा $q \neq 1$। यदि ${}^{101}C_1 + {}^{101}C_2 \cdot S_1 + ... + {}^{101}C_{101} \cdot S_{100} = \alpha T_{100}$, तो α बराबर है :

(A) 200 (B) 2^{100} (C) 2^{99} (D) 202

Sol. **B**

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$T_n = \frac{\left(\dfrac{q+1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\dfrac{q+1}{2} - 1} \Rightarrow \frac{(q+1)^{n+1} - 2^{n+1}}{(q-1)\times 2^n}$$

Let

$$S = {}^{101}C_1 + {}^{101}C_2 S_1 + ... + {}^{101}C_{101} S_{100}$$

$$S = \sum_{r=0}^{100} {}^{101}C_{r+1} S_r$$

$$= \sum_{r=0}^{100} {}^{101}C_{r+1} \times \left(\frac{q^{r+1}-1}{q-1}\right)$$

$$= \frac{1}{q-1}\sum_{r=0}^{100} {}^{101}C_{r+1}(q^{r+1}-1)$$

$$= \frac{1}{q-1}\left[(1+q)^{101} - 1 - (2^{101}-1)\right]$$

$$= \frac{(1+q)^{101} - 2^{101}}{q-1}$$

Now, $T_{100} = \dfrac{(q+1)^{101} - 2^{101}}{(q-1)\times 2^{100}}$

18. एक थैले में 30 सफेद गेंदे तथा 10 लाल गेंदें हैं। थैले में से यादच्छया, एक एक करके (प्रतिस्थापना सहित) 16 गेंदें निकाली गई। यदि निकाली गई सफेद गेंदों की संख्या X है, तो $\left(\frac{\text{X का माध्य}}{\text{X का मानक विचलन}}\right)$ बराबर है:

(A) $3\sqrt{2}$ (B) 4 (C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (D) $4\sqrt{3}$

Sol. **D**

P (white ball) = $\frac{30}{40}$ = p

q = $\frac{1}{4}$, n = 16

Mean = np = $16 \times \frac{3}{4}$ = 12

S.D. = $\sqrt{npq}$ = $\sqrt{12 \times 1/4}$ = $\sqrt{3}$

$\Rightarrow \frac{\text{Mean}}{\text{S.D}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$

19. माना द्विघात समीकरण $x^2 \sin\theta - x(\sin\theta\cos\theta + 1) + \cos\theta = 0$ $(0 < \theta < 45^\circ)$, के मूल α तथा β $(\alpha < \beta)$ है तो $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^n + \frac{(-1)^n}{\beta^n}\right)$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{1-\cos\theta} - \frac{1}{1+\sin\theta}$ (B) $\frac{1}{1+\cos\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$

(C) $\frac{1}{1+\cos\theta} - \frac{1}{1-\sin\theta}$ (D) $\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}$

Sol. **D**

$x^2 \sin\theta - x(\sin\theta\cos\theta + 1) + \cos\theta = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha^n + \frac{(-1)^n}{\beta^n}\right) = ?$

$(x\sin\theta - 1)(x - \cos\theta) = 0$

$x = \cos\theta, \frac{1}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \alpha = \cos\theta, \beta = \frac{1}{\sin\theta}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(+\cos\theta)^n + \frac{(-1)^n}{(+1/\sin\theta)^n}\right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((+\cos\theta)^n + (-\sin\theta)^n\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((\cos\theta)^0 + (\cos\theta)^1 + (\cos\theta)^2 + \ldots..\right)$$

$$+ [(-\sin\theta)^0 + (-\sin\theta)^1 + (-\sin\theta)^2 + \ldots..]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right)$$

20. माना S = {1, 2, ..., 20} है। S के एक उपसमुच्चय B को "nice" कहा जाता है यदि इसके अवयवों का योग 203 है तो, S के एक यादच्छया चुने गए उपसमुच्चय के "nice" होने की प्रायिकता है:

(A) $\frac{4}{2^{20}}$ (B) $\frac{6}{2^{20}}$ (C) $\frac{5}{2^{20}}$ (D) $\frac{7}{2^{20}}$

Sol. **C**

S = {1,2, ... 20}
sum of all elements (s) of 'S' = 210
$B \subset S$ & for "nice". sum of element(s) must be 203
Favourable cases = 7, (1, 6), (2,5), (3,4), (1,2,4)

$\Rightarrow$ p = $\frac{5}{2^{20}}$

21. माना एक सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि |z| + z = 3 + i (जहाँ i = $\sqrt{-1}$), तो |z| बराबर है :

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{41}}{4}$ (D) $\frac{\sqrt{34}}{3}$

Sol. **A**

$|z| + z = 3 + i$

$\sqrt{x^2+y^2} + x = 3$, y = 1

$\sqrt{x^2+1} = 3 - x$

$x^2 + 1 = 9 + x^2 - 6x$
6x = 8

$x = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ z = $\frac{4}{3} + i$

$\Rightarrow$ |z| = $\sqrt{\frac{16}{9}+1}$ = $\frac{5}{3}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{x\cot(4x)}{\sin^2 x \cot^2(2x)}$ बराबर है :

(A) 4 (B) 1 (C) 0 (D) 2

Sol. **B**

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cot 4x}{\sin^2 x.\cot^2 2x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\frac{\sin^2 x}{x^2} \times x^2} \times \frac{\tan^2 2x}{\frac{\tan 4x}{4x}} \times \frac{1}{4x^2} \times 4x^2$$

$$\Rightarrow \frac{4x^3}{4x^3} = 1$$

23. एक ΔABC में सामान्य संकेतों के आधार पर दिया है कि $\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}$ है। यदि $\frac{\cos A}{\alpha}=\frac{\cos B}{\beta}=\frac{\cos C}{\gamma}$ है, तो क्रमित त्रिक (α, β, γ) का एक मान है :

(A) (19, 7, 25) (B) (7, 19, 25) (C) (5, 12, 13) (D) (3, 4, 5)

Sol. **B**

$$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}$$

$$\frac{\cos A}{\alpha}=\frac{c+a}{\beta}=\frac{\cos c}{\gamma}$$

$$\frac{b+c}{11}=\frac{c+a}{12}=\frac{a+b}{13}=\frac{2(a+b+c)}{36}$$

$$\frac{c}{5}=\frac{b}{6}=\frac{a}{7}$$

$a = 7\lambda$, $b = 6\lambda$, $c = 5\lambda$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{61-49}{60} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$\cos B = \frac{74-36}{70} = \frac{19}{35}$$

$$\cos C = \frac{60}{84}=\frac{5}{7}$$

$$\alpha : \beta : \gamma = \frac{1}{5} : \frac{19}{35} : \frac{5}{7}$$

$\Rightarrow$ 7 : 19 : 25

24. माना $\sqrt{3}\hat{i}+\hat{j}, \hat{i}+\sqrt{3}\hat{j}$ तथा $\beta\hat{i}+(1-\beta)\hat{j}$ क्रमशः तीन बिंदुओं A, B तथा C के मूलबिंदु O के सापेक्ष, स्थिति सदिश है। यदि C की, OA तथा OB के बीच बने न्यूनकोण के समद्विभाजक से दूरी $\frac{3}{\sqrt{2}}$ है, तो β के सभी संभावित मानों का योग है:

(A) 3 (B) 4 (C) 2 (D) 1

Sol.

D

Bisector is x – y = 0

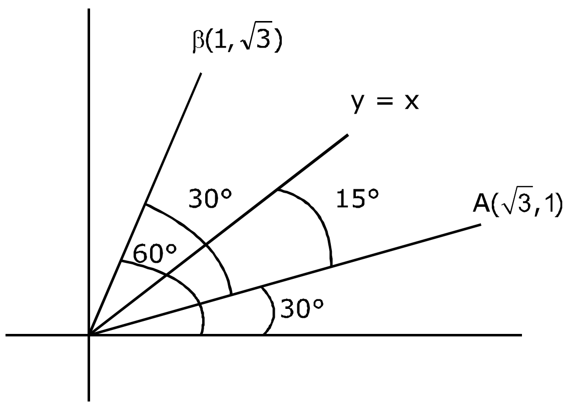
$C(\beta, 1-\beta)$

$$\frac{|\beta+\beta-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$2\beta - 1 = 3$ or $- 3$

$\beta = 2, -1$

$2 + (-1) = 1$



25. {1, 2, 3, ..., 20} से {1, 2, 3, ..., 20} पर ऐसे आच्छादक फलनों, जिनके लिए f(k) तीन का गुणज है जब k चार का गुणज है, की संख्या है :

(A) $5^6 \times 15$ (B) $6^5 \times (15)!$ (C) $(15)! \times 6!$ (D) $5! \times 6!$

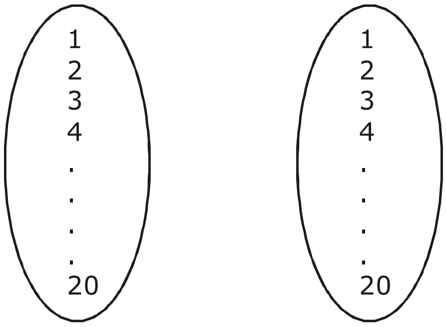
Sol. **C**

for k = {4, 8, 12, 16, 20} $\Rightarrow$ f(k) = {3, 6, 9, 12, 15, 18}

No. of ways = 6!

for remaining = 15!

$\Rightarrow$ 6! × 15!



26. यदि एक अतिपरवलय के संयुग्मी अक्ष (conjugate axis) की लम्बाई 5 है तथा इसकी नाभिकों के बीच की दूरी 13 है, तो इस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता हैः

(A) 2 (B) $\frac{13}{8}$ (C) $\frac{13}{12}$ (D) $\frac{13}{6}$

Sol. **C**

$2b = 5, \ 2ae = 13$

$b^2 = \frac{25}{4} = a^2 (e^2 - 1)$

$\frac{25}{4} = \frac{169}{4c^2} (e^2 - 1)$

$25 e^2 = 169 e^2 - 169$

$\frac{169}{144} = e^2 \Rightarrow e = \frac{13}{12}$

27. माना एक दीर्घवत्त, जिसका दीर्घ–अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है तथा केंद्र मूलबिंदु पर है, के नाभिलंब की लंबाई 8 है। यदि दीर्घवत की नाभियों के बीच की दूरी, इसके लघु–अक्ष की लंबाई के समान हो, तो निम्न में से कौन–सा बिंदु इस पर स्थित है?

(A) $\left(4\sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$ (B) $\left(4\sqrt{3}, 2\sqrt{2}\right)$ (C) $\left(4\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ (D) $\left(4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

Sol. **B**

$\frac{2b^2}{a} = 8 \Rightarrow b^2 = 4a$

$2ae = 2b$

$b = ae$

$b^2 = a^2 - a^2e^2$

$2a^2e^2 = a^2$

$\Rightarrow \quad e^2 = \frac{1}{2} \qquad e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow b = \frac{a}{\sqrt{2}}$ & $\frac{a^2}{2} = 4a$

$a = 8, \ b = 4\sqrt{2}$

Now equation

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$

28. दो रेखाएँ $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-6}{-1}$ तथा $\frac{x+5}{7}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-3}{4}$ बिंदु R पर काटती है। बिंदु R के xy-तल में प्रतिबिंब के निर्देशांक हैं :

(A) (2, −4, −7) (B) (2, − 4, 7) (C) (−2, 4, 7) (D) (2, 4, 7)

Sol. **A**

L_1: $\frac{x-3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{3-6}{-1}$

& L_2: $\frac{x+5}{7}=-\frac{y-2}{6}=\frac{3-3}{4}$

For L_1: $x = 3 + \lambda$, $y = 3\lambda - 1$, $z = 6 - \lambda$ and For L_2: $x = 7\mu - 54$, $y = -6\mu + 2$, $z = 4\mu + 3$

$6 - 7\mu = -8$

$\lambda + 4\mu = 3$

$-11\mu = -11$

$\mu = 1$

R (2, − 4, 7)

$\Downarrow$

Reflection is (2, − 4, −7)

29. समाकलन $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin 2x\left(\tan^5 x+\cot^5 x\right)}$ बराबर है :

(A) $\frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)\right)$ (B) $\frac{1}{20}\tan^{-1}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)$

(C) $\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right)$ (D) $\frac{\pi}{40}$

Sol. **A**

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin 2x(\tan^5 x+\cot^5 x)}$$

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin 2x\left(\tan^5 x+\cot^5 x\right)}$$

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\tan^5 x\ dx}{\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}\left(\tan^{10} x+1\right)}$$

$$I=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{\tan^4 x\sec^2 x\ dx}{2\left(\tan^{10} x+1\right)}$$

Let $\tan^5 x = t$

$5\tan^4 x\sec^2 x\,dx = dt$

$\tan^4 x\sec^2 x\,dx = \frac{dt}{5}$

$$I=\frac{1}{10}\int_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5}^{1}\frac{dt}{t^2+1}$$

$$I = \frac{1}{10} \times \tan^{-1} t \,\Big|_{(1/\sqrt{3})^5}^{1}$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{1}{9\sqrt{3}}\right)\right)$$

30. माना x, y धानात्मक वास्तविक संख्याएँ है तथा m, n धन पूर्णांक हैं। व्यंजक $\frac{x^m y^n}{\left(1+x^{2m}\right)\left(1+y^{2n}\right)}$ का अधिकतम मान है :

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{m+n}{6mn}$

Sol. **C**

using A.M $\geq$ G.M

$$\frac{1+x^{2m}}{2} \geq x^m$$

$$\frac{1+y^{2n}}{2} \geq y^n$$

Now, $\frac{x^m}{(1+x^{2m})} \times \frac{y^n}{(1+y^{2n})} \leq \frac{1}{4}$